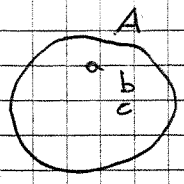
INSIEMI

Un insieme (indicato con una lettera maiuscola) è una collezione di oggetti:

$$A = \{a, b, c\}$$



DIAGRAMMI DI EULERO

Gli elementi si indicano con lettera minuscola tra $\{\}$ o graficamente (elencazione) ①

Invece di scrivere tutti gli elementi si può anche scrivere la proprietà ③ (comune) che stabilisce gli elementi appartenenti all'insieme:

$A = \{$ parole che iniziano per A$\}$ cane $\notin B$ albero $\in B$

INSIEMI DI NUMERI

- INSIEME N NATURALI: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$ (0 non rientra) (a la moltiplicazione)

Con questo insieme si può eseguire la SOMMA (+): il risultato è infatti ancora un numero naturale. Con il + si indica un'operazione binaria (che cioè associa due elementi di un insieme per ottenere un terzo elemento di quell'insieme.

$$(a, b) \in \mathbb{N}^2$$ (coppia)

$\mathbb{N}^2 = \{(a,b) \quad a,b \in \mathbb{N}\}$ con $\mathbb{N}^2$ si indicano le coppie di numeri naturali

Le coppie si possono ORDINARE e inoltre due coppie sono uguali se:

$$(a,b) = (c,d) \quad \text{se } a=c \quad b=d$$

$\mathbb{N}^3 = \{(a,b,c) \quad a,b,c \in \mathbb{N}\}$ le terne dove a,b,c sono n° naturali

$\mathbb{N}^m$ ennple di numeri naturali

Si può eseguire anche la moltiplicazione (×) (operazione binaria) ma che in realtà è ancora una somma (è infatti una serie di somme successive).

Valgono le proprietà:

LEGGE ASSOCIATIVA $(a+b)+c = a+(b+c)$

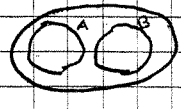
" DISTRIBUTIVA $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

" COMMUTATIVA

Gli elementi neutri sono quelli che nell'operazione non cambiano nulla (nella somma è $\emptyset$ (nel prodotto è 1). Nei numeri naturali non si inserisce lo $\emptyset$.

OPERAZIONI CON GLI INSIEMI

$\mathbb{N} \cup \{\emptyset\}$ ("unione": prendere gli elementi di A e associarli a quelli di B)



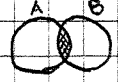
$\forall a \quad a + \emptyset = \emptyset + a = a$

("per ogni" ed è un QUANTIFICATORE UNIVERSALE)

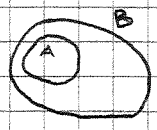
$A \cup B$ $\{x$ tale che $x \in A$ oppure $x \in B\}$ (gli elementi in comune sono considerati una sola volta)

- INTERSEZIONE: l'insieme che contiene solo gli elementi in comune

$A \cap B$ $\{x$ tale che $x \in B$ e $x \in A\}$



- INCLUSIONE: gli elementi di un insieme sono inclusi totalmenti in un altro. A è sottoinsieme di B.
$A \subseteq B$



MASTER COPY

Tel. 388/9837745

$P = \{$ num. naturali e pari: $\} \subseteq N$

$P = \{ m \in N \quad m = 2m, \ m \in N \}$
PARI

$A \subsetneq N$: sottoinsieme proprio, cioè in N ci sono elementi che non appartengono ad A.

$P \cap D = \varnothing$ (pari, dispari) per comprendere l'1

INSIEME VUOTO

dove $D = \{ m \in N \quad m = 2m-1, \ m \in N \}$

perché $2m \neq 2m-1 \ \forall m \quad 0 \neq 1$

- COMPLEMENTARE: gli elementi di B non presenti nel sottoinsieme A (con $A \subseteq B$)
$B \setminus A = \{ x \in B \ t.c. \ x \notin A \} = B - A$
differenza

- $A \times B = \{(a,b)\}$ PRODOTTO CARTESIANO

FUNZIONI (o APPLICAZIONI)
Una funzione è l'insieme di tre cose: (f, A, B)

A ⇒ dominio	l'insieme dove noi operiamo, gli elementi su cui opera la funzione
B ⇒ codominio	l'insieme di tutti i valori che può assumere la funzione al variare dei valori del dominio.
f ⇒ relazione	a qualsiasi elemento del dominio associa uno e uno solo elemento del codominio si indicano le operazioni che devono effettuarsi su x per ottenere f

$A = \{$ LU, MA, ME, GI, VE $\}$
$B = \{$ SOLE, PIOGGIA, NEVE $\}$



$f(LU) = sole$
$f(MA) = sole$
!

nel codominio ci possono essere elementi non relazionati

Dobbiamo osservare che dominio e codominio siano corretti.
$A = N$
$B = N$
$f(m) = m - 2$
non è corretto infatti $f(1) = -1 \notin N$ non rientra nel codominio

restringendo il dominio va bene $A = \{ m \in N \ m > 2 \}$
La funzione è la stessa, è il dominio che cambia.

L'immagine è il valore del codominio associato Y di un elemento del dominio tramite f:
$f: A \to B \quad f(a) = b$ b è immagine di a tramite f

L'immagine di una funzione sono gli elementi del codominio associati agli elementi del dominio tramite f:

$Im f = \{ b \in B \cdot \exists a \in A \quad f(a) = b \}$

(cose diverse finiscono in coselativerse)

- Una funzione è **INIETTIVA** quando per ogni coppia di elementi del dominio abbiamo due valori differenti nel codominio.

$f: A \to B$ è iniettiva se $\forall (a_1, a_2) \in A$ con $a_1 \neq a_2$ $\quad f(a_1) \neq f(a_2)$

↳ funzione con dominio A e codominio B

$A = \{ m \in N \quad m \geq 2 \}$

$B = N$

$f(m) = m - 2$

$m_1, m_2 \geq 2 \quad m_1 \neq m_2 \quad f(m_1) \neq f(m_2)$

↳ ma sono infinite

Come si dimostra?

Supponiamo per assurdo che accada $f(m_1) = m_1 - 2 \quad f(m_2) = m_2 - 2$

$m_1 - 2 = m_2 - 2 \Rightarrow m_1 = m_2$ ma ciò non è possibile e quindi effettivamente la funzione è iniettiva.

ESERCIZIO

$f: N \to N \cup \{\emptyset\} \qquad f(m) = m^2 - 3m + 2$

1) è funzione? (cambiare se necessario)
2) è iniettiva?

PARABOLA $\Rightarrow (m-1)(m-2)$ si annulla per $m=1$ ed $m=2$



1) $m^2 - 3m + 2 \geq \emptyset$

$m^2 - 3m + 2 = 0$

$m_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

$m \geq 2 \cup m \leq 1$ NON È CORRETTO

DOMINIO: $A = \{ m \in N \quad m \geq 2 \text{ oppure } 0 \leq m \leq 1 \} \cup \{\emptyset\}$

↳ DATO CHE IL DOMINIO È N IN REALTÀ È CORRETTO!!!

2) $\forall (a_1, a_2) \in A \quad$ con $a_1 \neq a_2 \quad f(a_1) \neq f(a_2)$

$f(a_1) = a_1^2 - 3a_1 + 2$

$f(a_2) = a_2^2 - 3a_2 + 2$

PER ASSURDO $\quad a_1^2 - 3a_1 = a_2^2 - 3a_2$

$a_1^2 + a_2^2 = 3a_1 - 3a_2 \Rightarrow (a_1 + a_2)(a_1 - a_2) = 3(a_1 - a_2)$

$a_1 + a_2 = 3$ NON È INIETTIVA PERCHÈ L'UGUAGLIANZA PUÒ ESSERE VERIFICATA

3) NON È NEMMENO SURGETTIVA PERCHÈ $f(m) \neq 1$ infatti $m^2 - 3m + 2 = 1$ dà non naturale

ESERCIZIO

FUNZIONE DEFINITA A TRATTI

$f(m) = \begin{cases} \frac{m}{2} & \text{se } m \text{ è pari} \\ \frac{m+1}{2} & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases} \qquad f: N \to N$

1) è iniettiva?
2) è surgettiva?

1) $\forall (m_1, m_2) \in N \quad$ con $m_1 \neq m_2 \quad f(m_1) \neq f(m_2)$

per assurdo $\quad \frac{m_1}{2} = \frac{m_2 + 1}{2} \Rightarrow m_1 = m_2 + 1$ NON È INIETTIVA

2) $\forall m \in N \quad \exists\, m \in N \quad f(m) = m \qquad m = 2m \qquad f(m) = f(2m) = \frac{2m}{2} = m$ È SURGETTIVA

La f non è iniettiva se esistono almeno due o più elementi del dominio che producono lo stesso risultato:

$\exists$ $a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \quad f(a_1) = f(a_2)$

(QUANTIFICATORE UNIVERSALE)

(VEDI "IMMAGINE")

- Se l'immagine corrisponde al codominio si dice che la funzione è **SURGETTIVA** (o suriettiva)

$f: A \to B \quad \forall b \in B \ \exists a \in A$ t.c. $f(a) = b$ se tutto ciò che c'è nel codominio è immagine di f

$Imf = B$

ESERCIZIO

$f: N \to N$

$f(m) = m^2$

1) f è iniettiva?
2) f è surgettiva?

1) $\forall (m_1, m_2)$ con $m_1 \neq m_2 \quad f(m_1) \neq f(m_2)$

per assurdo $m_1^2 = m_2^2 \Rightarrow m_1 = m_2$ NON POSSIBILE E QUINDI FUNZIONE INIETTIVA

2) $\forall m_2 \in N \quad E m_1 \in N : m_1^2 = m_2$

$\Downarrow$

$m_1 = \sqrt{m_2}$ NON POSSIBILE POICHÈ m_1 NON È PIÙ NATURALE (NON SURGETTIVA)

1) OPPURE: $f(m) = f(m)$ $\quad m^2 = m^2 \Rightarrow m^2 - m^2 = 0$ $\quad (m-m)(m+m) = 0$

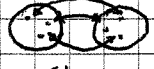
ALMENO UNO DEI FATTORI DEVE ESSERE $\emptyset$

$(m+m)$ NON PUÒ ESSERE $\emptyset$

$\Rightarrow \quad m - m = 0 \quad m = m$ IMPOSSIBILE

Una funzione si dice MONOTONA CRESCENTE quando (se dominio e codominio sono sottoinsiemi di "numeri") dato $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ $\forall x, y \in A$. Si dice invece CRESCENTE IN SENSO STRETTO se dato $x, y \Rightarrow f(x) < f(y) \quad \forall x, y \in A$.

Si dice BIUNIVOCA (1 A 1) BIGETTIVA se f è iniettiva e surgettiva, ciò significa che ad ogni elemento del dominio corrisponde un elemento differente del codominio e viceversa.



Questo è utile per contare in quanto costruendo un insieme CAMPIONE (dove conosco il numero degli elementi) collegato in maniera biunivoca con un altro insieme, io conosco il numero degli elementi del secondo.

Ciò significa che si può costruire una funzione INVERSA: dagli elementi di B si può tornare a quelli di A.

$\exists f^{-1}: B \to A$

PROPRIETÀ F. INVERSA

$f^{-1}(f(a)) = a \quad \forall a \in A$ (deve tornare allo stesso punto da cui sono partito)

$f(f^{-1}(b)) = b \quad \forall b \in B$

* per ricavare l'inversa se $b = a - \frac{2}{3}$...
basta calcolare la formula inversa ed esplicitare la a

$f(m) = \frac{m}{2} \quad \overset{x = \frac{m}{2} \Rightarrow 2x = m}{\Rightarrow} \quad f^{-1}(m) = 2x$

$f(m) = m+1$ $\quad A = \mathbb{N}$ $\quad B = \{m \in \mathbb{N} : m \geq 2\}$ $\quad$ È BIGETTIVA

FUNZIONE INVERSA (NON È IL RECIPROCO NEI NUMERI NATURALI)

$f^{-1}(m) = m-1$

L'insieme A è finito se c'è un numero $m \in \mathbb{N}$: $\exists f: A \to \{1,2,3,\dots,m\}$ BIGETTIVA. Viceversa si dice che non è finito.

al di sopra del quale non ci sono altri numeri

• INS. INTERI

La differenza nell'insieme $\mathbb{N}$ non è sempre possibile. Si considera l'insieme dei numeri INTERI $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

La differenza è ancora un'operazione binaria ed è una somma: $a - b = a + (-b)$

l'opposto $\Rightarrow$ $b + (-b) = 0$

L'insieme $\mathbb{N}$ è sottoinsieme di $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$ STRETTA

Tuttavia (cosa strana!!!) è possibile ricavare una funzione bigettiva (1 A 1) tra i due insiemi.

$\mathbb{N}$: $1 \to 0$, $2 \to 1$, $3 \to -1$, $4 \to 2$, $5 \to -2$, $6 \to 3$ $\quad \mathbb{Z}$

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \qquad f(m) = \begin{cases} \frac{m}{2} & m \text{ pari} \\ -\frac{m-1}{2} & m \text{ dispari} \end{cases}$$

1) INIETTIVA?
2) SURGETTIVA?
3) INVERSA?

Questa funzione è bigettiva ma in realtà $\mathbb{N}$ ha meno elementi di $\mathbb{Z}$. Si era detto però che una funzione è bigiettiva se dominio e codominio hanno gli stessi elementi ma $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$ non sono così. Ciò però è possibile trattandosi di insiemi infiniti.

$$\#\mathbb{N} = +\infty \qquad \#\mathbb{Z} = +\infty$$

ESERCIZIO 1) $\forall m_1, m_2$ con $m_1 \neq m_2$ $\quad f(m_1) \neq f(m_2)$ $\quad$ caso: pari-dispari $\Rightarrow$ non possono essere uguali essendo uno negativo e uno positivo

pari-pari $\Rightarrow$ $\frac{m_1}{2} \neq \frac{m_2}{2}$ $\quad m_1 \neq m_2$

dispari-disp. $\Rightarrow$ $\quad\dots\quad m_1 \neq m_2$

2) $\forall z \in \mathbb{Z}$ $\exists m \in \mathbb{N}$ $f(m) = z$ $\quad$ m pari $\Rightarrow \frac{m}{2} = 1, 2, 3, 4 \dots \mathbb{N}$ $\quad$ è surgettiva

m disp $\Rightarrow -\frac{m-1}{2} = 0, -1, -2, -3 \dots$

3) $f^{-1}(m) \begin{cases} 2m & m \text{ naturali} \\ -2m+1 & m \text{ non naturali} \end{cases}$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745